МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)**
пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород
ГСП-20, 603950
Тел. (831) 462-30-90 Факс (831) 462-30-85
e-mail: unn@unn.ru
ОКПО 02068143 ОГРН 1025203733510
ИНН/КПП 5262004442/526201001
17.11.2017 № 13-4/287
на № ________ от ________

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского
доктор физ.-мат. наук

_______________ В.Б. Казанцев

«_15_» _ноября_ 2017 г.

ОТЗЫВ

**ведущей организации - Федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ им. Н.И. Лобачевского)**

**о диссертации Трещёва Валентина Сергеевича
«Теоремы о возмущениях векторно накрывающих отображений в исследовании неявных
дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление**

В теории дифференциальных уравнений подробно изучены уравнения, разрешенные относительно производной, неявные уравнения исследованы далеко не столь подробно. Еще меньше в литературе рассмотрены неявные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Для таких уравнений практически не исследовались краевые задачи и задачи управления, дифференциальные неравенства, условия устойчивости и другие проблемы. К неявным уравнениям неприменимы многие классические результаты и методы анализа. В то же время неявные дифференциальные уравнения имеют многочисленные актуальные приложения в геометрии, механике, физике, причем постоянно возникают новые приложения, как с развитием современной науки, повышением сложности и точности математических моделей, так и с развитием собственно теории неявных уравнений.

Диссертация посвящена разработке новых методов исследования неявных дифференциальных уравнений, основанных на результатах о накрывающих отображениях. Накрывающие отображения – достаточно молодое направление анализа сейчас активно развивается, прежде всего благодаря фундаментальным работам Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, Л.М. Грейвса, А.В. Дмитрука, А.Д. Иоффе, А.А. Милютина, Б.С. Мордуховича, Н.П. Осмоловского, А. Удерзо. Идеи и методы применения результатов о накрывании в теории дифференциальных и интегральных уравнений предложены А.В. Арутюновым, Е.Р. Аваковым, Е.С. Жуковским, получили дальнейшее развитие в исследованиях С.Е. Жуковского, Е.А. Плужниковой краевых задач, управляемых систем.

В диссертационном исследовании В.С. Трещёва методы, основанные на результатах о накрывающих отображениях, распространяются на дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Причем автор предлагает несколько иной подход к исследованию задачи Коши и краевых задач, использующий векторный аналог понятия накрывания. Так как задача Коши и краевые задачи сводятся к системе операторных уравнений в произведении пространства суммируемых функций и конечномерного пространства, то предлагается не определять метрику в этом произведении, а наделить его векторнозначной метрикой. Для реализации этой идеи автор не только использует известные утверждения о возмущениях векторно накрывающих отображений, но и получает новые условия непрерывной зависимости от параметров решений систем уравнений с накрывающими отображениями. Этот результат имеет самостоятельное значение в анализе; в диссертации на основе этого результата исследуется непрерывная зависимость от параметров решений неявных функционально-дифференциальных уравнений.

Остановимся подробнее на содержании и основных результатах диссертации. Диссертация объемом 94 страницы состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, перечня используемых обозначений и списка литературы, содержащего 46 наименований.

Во введении формулируются цели исследования, дается обзор работ по теории неявных дифференциальных уравнений, по анализу накрывающих и метрически регулярных отображений, обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, кратко излагаются основные результаты.

Первая глава работы посвящена результатам о векторно накрывающих отображениях, которые затем используются в исследовании неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В § 1.1 сформулированы определения накрывания, векторного накрывания и векторного накрывания на заданных множествах, описаны конкретные множества накрывания, используемые в работе. В § 1.2 приведена полученная Е.С. Жуковским теорема о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений и получены условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями (теорема 1.2.2). В § 1.3 найдены условия векторного накрывания оператора Немыцкого. Это утверждение связывает накрывающие свойства оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых существенно ограниченных функций, с накрывающими свойствами функции, порождающей этот оператор. Полученные условия открывают возможность применения к различным системам функциональных, дифференциальных, интегральных уравнений результатов о векторно накрывающих отображениях.

Вторая глава посвящена исследованию задачи Коши и краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$f_i\left(t, x_1\big(h_1(t)\big), \dots, x_n\big(h_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)\right) = y_i(t), \ \ i = \overline{1,m}, \ \ t \in [a,b] \quad (2.1.1)$$

(здесь и ниже используем номера формул диссертации). Применяется метод, основанный на сведении дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий к системе операторных уравнений относительно пары векторов $(\dot{x}, x(a))$, компонентами первого вектора являются производные искомых функций, второго – начальные значения. Полученные в § 1.3 результаты позволяют найти условия накрывания отображений по соответствующим переменным, а утверждения из § 1.1 и § 1.2 – исследовать полученные системы операторных уравнений.

В § 2.1 исследуется задача Коши для дифференциального уравнения (2.1.1) в случае запаздывающего аргумента, то есть при выполнении неравенства $h_j(t) \le t$. В п. 2.1.1 исследуется вопрос о ее разрешимости. Доказаны: теорема 2.1.1 о существовании решений и следствие из этой теоремы о продолжении решений. Здесь же получены оценки решений. Основные предположения о векторной функции $f(t, x, \dot{x})$: требование векторного накрывания этой функции по третьему аргументу и липшицевость по каждой компоненте второго аргумента, причем только при тех значениях времени t, при которых $h_j(t) \in [a,b]$.

В п. 2.1.2 рассмотрена задача о непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши. Именно, пусть определена последовательность систем вида (2.1.1) и имеет место совокупное накрывание (с одним матричным коэффициентом) соответствующих функций $f^l(t, x, \dot{x})$, $l = 1,2, \dots$, по третьему аргументу и липшицевость всех функций по каждой компоненте второго аргумента с одной константой. Используя полученные в предыдущем пункте оценки, диссертант устанавливает, что в этом случае последовательность решений соответствующих задач Коши сходится.

В § 2.2 представлены результаты исследования краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (в отличие от § 2.1 здесь не требуется, чтобы выполнялось неравенство $h_j(t) \in [a,b]$). Рассматриваются краевые условия

$$g_i\big(t, x_1(a), \dots, x_n(a), x_1(b), \dots, x_n(b)\big) = \Delta_i, \ \ i = \overline{1,m}. \quad (2.2.2)$$

Как и дифференциальное уравнение, краевые условия автор записывает в виде операторных уравнений относительно неизвестных $(\dot{x}, x(a)) \in L_\infty \times \mathbb{R}^n$. Краевая задача (1.1.1), (2.2.2) формализуется в виде системы операторных уравнений, к которой применяются утверждения о накрывающих отображениях из первой главы диссертации. Такой подход позволил автору получить в п. 2.1.1 условия разрешимости краевой задачи и оценки решений, а в п. 2.2.2 – условия непрерывной зависимости решений от изменений функций f_i, g_i, y_i и чисел Δ_i. Кроме предположений векторного накрывания функции $f(t, x, \dot{x})$ по третьему аргументу и липшицевости по каждой компоненте второго аргумента требуется, чтобы спектральный радиус произведения матрицы накрывания и матрицы из коэффициентов Липшица был меньше 1. Теоретические результаты этого параграфа иллюстрируются примером краевой задачи для системы двух неявных дифференциальных уравнений с запаздыванием. В терминах параметров, входящих в уравнения и краевые условия, получены условия существования решений и их оценки.

Таким образом, тема диссертации несомненно актуальна, в диссертации на основе утверждений о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений метрических пространств предложены новые идеи, разработаны новые подходы к исследованию неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, получены новые результаты о разрешимости таких уравнений, оценках решений и непрерыной зависимости решений от параметров. Полученные результаты представляют несомненный теоретический интерес для теории дифференциальных уравнений, могут использоваться в исследованиях краевых задач и задач управления для различных функционально-дифференциальных уравнений. Результаты о возмущениях векторно накрывающих отображений применимы в функциональном анализе при изучении различных операторных уравнений, интегральных уравнений. Полученные результаты также могут использоваться в исследовании разрешимости, корректности математических моделей, нахождении оценок их решений.

Замечания к диссертационной работе:

1. Автор не прокомментаровал, можно ли применить результаты § 2.2 к исследованию важной в приложениях периодической краевой задачи, то есть будет ли удовлетворять краевое условие $x_i(a) - x_i(b) = \Delta_i$ требованиям теорем 2.2.1, 2.2.2. Видимо, после преобразования этого условия к уравнению относительно $(\dot{x}, x(a))$ не будет выполнено предположение теоремы 2.2.1 о накрывании соответствующего функционала по переменной $\dot{x}$. Тогда остается невыясненным вопрос, могут ли все же применяться результаты о векторно накрывающих отображениях к периодической краевой задаче. В диссертации следовало дать соответствующие пояснения.

2. На странице 80, в примере 2.2.1, с использованием теоремы 2.2.1 доказана разрешимость рассматриваемой краевой задачи. В заключение отмечено, что из теоремы 2.2.1 можно вывести и оценку решения. Автору следовало, не ограничиваясь этим замечанием, получить и продемонстрировать эту оценку.

3. Диссертация содержит два важных для изложения примера: пример 1.1.1, иллюстрирующий определение векторного накрывания и способ нахождения матрицы накрывания, и пример 2.2.1 исследования краевой задачи. Для более полного представления полученных результатов следовало также привести пример исследования накрывающих свойств оператора Немыцкого и пример исследования задачи Коши. Было бы интересно наблюдать потерю продолжаемости решения при его выходе на область, в которой нарушено условие накрывания.

Приведенные замечания не снижают общего положительного впечатления о диссертационной работе.

Результаты диссертации своевременно опубликованы в одиннадцати работах, в том числе восемь статей опубликовано в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК РФ, в соавторстве с руководителем опубликована монография. Результаты были представлены на научных конференциях и семинарах.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Воронежском государственном университете, Воронежском государственном педагогическом университете, Тамбовском государственном университете, Национальном исследовательском Нижегородском государственном университет им. Н.И. Лобачевского, Пермском государственном национальном исследовательском университете, Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН.

Диссертация «Теоремы о возмущениях векторно накрывающих отображений в исследовании неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» удовлетворяет всем требованиям п.9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Валентин Сергеевич Трещёв, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математической физики и оптимального управления ИИТММ ННГУ 14 ноября 2017 года, протокол № 3. На заседании присутствовало 12 сотрудников, в том числе 2 доктора и 6 кандидатов физико-математических наук – специалистов по теме диссертационного исследования.

Отзыв подготовлен профессором кафедры математической физики и оптимального управления ИИТММ ННГУ доктором физико-математических наук, профессором Суминым Владимиром Иосифовичем.

Сумин Владимир Иосифович

доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, профессор, профессор кафедры математической физики и оптимального управления института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», www.unn.ru, тел. +7(951)905-97-00, эл. адрес: v_sumin@mail.ru

И.о. заведующего кафедрой математической
физики и оптимального управления,
доктор физико-математических наук, профессор Сумин Михаил Иосифович
эл. адрес: m.sumin@mail.ru

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ).
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 2.
Тел. (831) 462-30-03. Факс: (831) 462-30-85. E-mail: unn@unn.ru

Подпись Сумина В.И, Сумина М.И
Заверяю. Ученый секретарь ННГУ
Л.Ю. Черноморская
Тел. 462-30-21